ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015 – ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελ. 31

Α.2 Σχολικό βιβλίο σελ. 22

Α.3 Σχολικό βιβλίο σελ. 86-87

Α.4

α)ΛΑΘΟΣ

β)ΣΩΣΤΟ

γ)ΛΑΘΟΣ

δ)ΛΑΘΟΣ

ε)ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

Β.1 Έχουμε $(3x-1)\left(8x^2-6x+1\right)=0 \iff 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$.

Τότε $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{4}$ και $x=\frac{1}{2}$.

Το σύνολο των λύσεων είναι το διατεταγμένο σύνολο $\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.

Γνωρίζουμε ότι $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ και τα ενδεχόμενα είναι διαφορετικά ανά δυο.

Άρα $P(A\cap B)<P(A)<P(A\cup B)$.

Επομένως $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Έχουμε $9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{2}{3}$, $x\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$. Επειδή $P(\Gamma)\geq 0$ ισχύει

$P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

B.2 $P(A'-B')=P\left(A'\cap(B')'\right)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ **(1)**

Όμως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Άρα η **(1)** γίνεται $P(A'-B')=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Δ είναι $P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

B.3 $P(E)=P\left[(A\cap B')\cup(A'\cap B)\right]=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{2}$

$=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}-\frac{6}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

B.4 Έστω ότι τα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα τότε

$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{13}{12}>1$

Άτοπο γιατί $P(B\cup\Gamma)\leq 1$, άρα τα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

<u>ΘΕΜΑ 3^Ο</u>

Γ1. Από δεδομένα ισχύει: $f_1\%=10$, $f_5\%=30$ και τα αντίστοιχα κέντρα είναι

$x_1=9$, $x_2=11$, $x_3=13$, $x_4=15$, $x_5=17$

Αφού $\alpha_3=108^o$, $f_3=\frac{a_3}{360^o} \Leftrightarrow f_3=\frac{108^o}{360^o} \Leftrightarrow f_3=0,3$

Άρα $f_3\%=30$

Επίσης ισχύει

$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100 \Leftrightarrow 10+f_2\%+30+f_4\%+30=100 \Leftrightarrow f_2\%+f_4\%=30 \quad (1)$

$\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i f_i\%}{100} \Leftrightarrow 14=\frac{x_1 f_1\%+x_2 f_2\%+x_3 f_3\%+x_4 f_4\%+x_5 f_5\%}{100} \Leftrightarrow$

$1400=90+11f_2\%+390+15f_4\%+510$

$11f_2\%+15f_4\%=410 \quad (2)$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f_2\%=30-f_4\%$

Με αντικατάσταση στη (2) έχουμε

$11(30-f_4\%)+15f_4\%=410 \Leftrightarrow 330-11f_4\%+15f_4\%=410 \Leftrightarrow 4f_4\%=80$

Άρα $f_4\%=20$ και $f_2\%=10$

Γ2. Υπολογίζουμε το

$$s^2=\sum_{i=1}^{5}\frac{(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i\%}{100}=\frac{(9-14)^2\cdot 10+(11-14)^2\cdot 10+(13-14)^2\cdot 10+(15-14)^2\cdot 10+(17-14)^2\cdot 10}{100}\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{660}{100}\Leftrightarrow s^2=6,6$$

Έτσι $s^2=6,6\Leftrightarrow s=\sqrt{6,6}\Leftrightarrow s\simeq 2,57$

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{2,57}{14}\simeq 0,184\Leftrightarrow CV=18,4\%$$

Επειδή $CV=18,4\%>10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Ισχύει

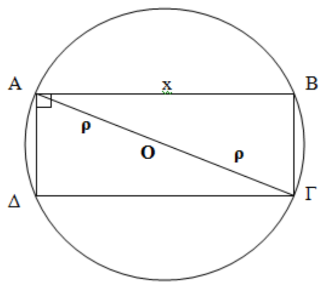
$$\bar{x}=14\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot v_i}{v}=14\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot v_i+x_5\cdot v_5}{v}=14\Leftrightarrow\frac{1780}{v}+\frac{x_5\cdot v_5}{v}=14\Leftrightarrow\frac{1780}{v}+x_5\cdot f_5=14\Leftrightarrow$$

$$\frac{1780}{v}+17\cdot 0,3=14\Leftrightarrow\frac{1780}{v}=8,9\Leftrightarrow v=\frac{1780}{8,9}\Leftrightarrow v=200$$

Γ4. Επειδή $\beta_i=\frac{a_i-\bar{a}}{s_a}\Leftrightarrow\beta_i=\frac{1}{s_a}a_i-\frac{\bar{a}}{s_a}$ από την εφαρμογή 3 του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 99 ισχύει: $\bar{\beta}=\frac{1}{s_a}\bar{a}-\frac{\bar{a}}{s_a}=0$ και $s_B=\left|\frac{1}{s_a}\right|s_a=\frac{s_a}{s_a}=1$

<u>ΘΕΜΑ 4^Ο</u>

Δ.1



Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Άρα εφαρμόζοντας πυθαγόρειο θεώρημα $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$. Άρα $\text{ΑΓ} = 2\rho = 10$

$100 = x^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow \text{ΒΓ}^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = \sqrt{100 - x^2}$

Πρέπει $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10$ και $x > 0$. Άρα $x \in (0,10)$.

Τότε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου $E = AB \cdot B\Gamma = x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0,10)$

Δ.2 Αφού $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $x \in (0,10)$

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(100 - x^2) - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{50}$

	0	$5\sqrt{2}$	10
f'	+	-	
f	$\nearrow$	$\searrow$	

Τότε για $x = 5\sqrt{2}$, $B\Gamma = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$. Άρα το ορθογώνιο τετράγωνο.

Δ.3 Παρατηρώ ότι $f(1) = \sqrt{100 - 1} = \sqrt{99}$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε

$$f'(1) = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{x}$$

$$f'(1) = \frac{98}{\sqrt{99}}$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$

Δ.4 Γνωρίζουμε ότι $A - B \subseteq A$, $P(A-B) \le P(A)$,

Αφού $P(A)$, $P(A-B) \in (0,1]$ και f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 5\sqrt{2})$ ισχύει

$$f\left(P(A-B)\right) \le f\left(P(A)\right) \Leftrightarrow$$

$$P(A-B) \cdot \sqrt{100 - P^2(A-B)} \le P(A) \cdot \sqrt{100 - P^2(A)}$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \quad (1)$$

Ισχύει $0 < P(A-B) \le 1 \Leftrightarrow P^2(A-B) \le 1 \Leftrightarrow -P^2(A-B) \ge -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A-B) \ge 99$

$$\Leftrightarrow \sqrt{100 - P^2(A-B)} = \sqrt{99} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Επειδή $0 \le P(A) \le 1$ προκύπτει $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{99}} < 1$

Εν τέλει $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} < \dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 1$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 5\sqrt{2})$ ισχύει

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$

ΚΡΙΤΙΚΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α: Θεωρία.

Θέμα Β: Θέμα που εξέταζε το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων αναλυτικά. Απαιτεί πολύ καλή γνώση και εξάσκηση στις Πιθανότητες.

Θέμα Γ: Κλασικό θέμα Στατιστικής με αρκετές πράξεις.

Θέμα Δ: Απαιτητικό θέμα. Το Δ1 συνδυαστικό με Γεωμετρία. Το Δ2 κλασικό θέμα. Το Δ3 θέμα για καλά διαβασμένους μαθητές. Το Δ4 ερώτημα το οποίο βρίσκεται στα όρια της θεωρίας Γενικής Παιδείας.

Τα θέματα ήταν διαβαθμισμένα και για πολύ καλά προετοιμασμένους μαθητές. Ήταν σαφώς πιο δύσκολα από πέρυσι, το άριστα επιτυγχάνεται δυσκολότερα συγκριτικά με την περσινή χρονιά.