ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 194

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 188

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 259

Α4. **α)** ΛΑΘΟΣ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ
δ) ΣΩΣΤΟ
ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1)$

$z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow z\bar{z}+16=4z\bar{z}+4$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

B2. **α)** Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w} = w$.

Έχουμε $\overline{w} = \overline{\left(\dfrac{2z_1}{z_2} + \dfrac{2z_2}{z_1}\right)} = 2\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + 2\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = 2\dfrac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + 2\dfrac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} =$

$2\dfrac{z_2}{z_1} + 2\dfrac{z_1}{z_2} = w$.

Άρα ο w είναι πραγματικός.

β) $|w| = \left|2\dfrac{z_1}{z_2} + 2\dfrac{z_2}{z_1}\right| \le 2\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + 2\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$

$|w| \le 2\dfrac{|z_1|}{|z_2|} + 2\dfrac{|z_2|}{|z_1|} \Leftrightarrow |w| \le 2 + 2 \Leftrightarrow |w| \le 4$

Και επειδή $w \in \mathbb{R}$

$-4 \le w \le 4$.

B3. Αν $w = -4$

$2\dfrac{z_2}{z_1} + 2\dfrac{z_1}{z_2} = -4 \Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1} + \dfrac{z_1}{z_2} = -2 \Leftrightarrow$

$z_2^2 + z_1^2 = -2z_1 \Leftrightarrow z_1^2 + 2z_1z_2 + z_1^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1$

$A\Gamma = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot |1 - 2i| =$

$= 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}$

$B\Gamma = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |-z_1(1 + 2i)| = |z_1| \cdot |1 + 2i| = 4\sqrt{5}$

Άρα ΑΓ=ΒΓ.

Οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $$f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Αφού $(x-1)^2\geq 0,\ (x^2+1)^2>0,\ e^x>0\ \forall x\in A_f$ και f συνεχής στο $x_o=1$

x	-∞	1	+∞
f'	+		+
f	↗		↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Στο $$\left.\begin{array}{l} A_1=(-\infty,1) \\ f \nearrow A_1,\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \end{array}\right\}\Leftrightarrow f(A_1)=\left(0,\frac{e}{2}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2=(1,+\infty) \\ f \nearrow A_2,\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma \end{array}\right\}\Leftrightarrow f(A_2)=\left[\frac{e}{2},+\infty\right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(0,+\infty)$.

Γ2. $$f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right)=f(2)\overset{f\nearrow}{\Longleftrightarrow} e^{3-x}(x^2+1)=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{e^x}=\frac{2}{e^3}\Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Αφού το $\frac{e^3}{2}\in f(A)$, από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα και αφού f γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

Γ3. Η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\int_{2x}^{a} f(t)\,dt+\int_{a}^{4x} f(t)\,dt<2x\cdot f(4x)\overset{:2x>0}{\Longleftrightarrow}\frac{\int_{a}^{4x} f(t)\,dt-\int_{a}^{2x} f(t)\,dt}{2x}<\frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}}f(4x)$$

$$\frac{\int_{a}^{4x} f(t)\,dt-\int_{a}^{2x} f(t)\,dt}{2x}<f(4x)=\mathrm{K}'(4x)\quad \textbf{(1)}$$

Έστω η $K(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, με f συνεχής. Άρα η K είναι παραγωγίσιμη.

Εφόσον x>0, $2x<4x$ και από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο

$$[2x,4x]\ \exists \xi\in(2x,4x) \text{ ώστε } K'(\xi)=\frac{\int_a^{4x} f(t)\,dt-\int_a^{2x} f(t)\,dt}{2x}\Leftrightarrow K'(\xi)=f(\xi).$$

Με $K'(x)=f(x)>0 \Leftrightarrow K''(x)=f'(x)>0$ (από ερώτημα **Γ**$_1$). Άρα K' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως $\xi<4x \overset{K'\nearrow}{\Longleftrightarrow} K'(\xi)<K'(4x)$, που είναι η ζητούμενη.

Γ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ γιατί η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

$$2x,4x>0,\ a>0 \text{ με } g(x)=\frac{\int_{2x}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{4x} f(t)\,dt}{x}=\frac{\int_a^{4x} f(t)\,dt-\int_a^{2x} f(t)\,dt}{x}$$

Άρα

$$g'(x)=\frac{\left[f(4x)\cdot 4-f(2x)\cdot 2\right]x-\left(\int_a^{4x} f(t)\,dt-\int_a^{2x} f(t)\,dt\right)}{x^2}=\frac{f(4x)\cdot 4x-f(2x)\cdot 2x-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$=\frac{\left[2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right]+\left[2xf(4x)-2xf(2x)\right]}{x^2}=\frac{\left[2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right]+2x\left[f(4x)-f(2x)\right]}{x^2}>0$$

Λόγω του ερωτήματος **Γ**$_3$

$2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt>0$ & $2x\left[f(4x)-f(2x)\right]>0$ γιατί x>0 και καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f(4x)>f(2x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Θα δείξουμε ότι η g είναι συνεχής στο $x_o=0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\left[4f(4x)-2f(2x)\right]\overset{(*)}{=}$

$= 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2\cdot 1 = 2 = g(0)$

Άρα η g είναι συνεχής στο $x_o = 0$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(*) Η συνάρτηση $\left[4f(4x) - 2f(2x)\right]$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$$f'(x)\cdot e^{f(x)} + e^{-f(x)}\cdot f'(x) = 2$$

$$f'(x)\cdot e^{f(x)} - 2 = -f'(x)\cdot e^{-f(x)}$$

$$\left(e^{f(x)} - 2x\right)' = \left(e^{-f(x)}\right)'$$

$$e^{f(x)} - 2x = e^{-f(x)} + c \qquad (1)$$

Για $x = 0$

$$e^0 - 0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

Άρα η (1) γίνεται:

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2$$

$$\left(e^{f(x)} - x\right)^2 = 1 + x^2$$

$$\left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{1+x^2} \neq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Θέτω $g(x) = e^{f(x)} - x \neq 0$. Αφού η g είναι συνεχής και $g(x) \neq 0$, τότε διατηρεί πρόσημο.

Όμως $g(0) = 1 > 0$. Άρα $g(x) > 0$.

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$\underset{"1-1"}{\overset{\ln x}{\Longleftrightarrow}} f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Δ2.

α) $f'(x) = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

$$f''(x) = \frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = -\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

$f''(x) \le 0 \Leftrightarrow -x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f''	+	-
f	∪	∩

Σ.Κ.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o = 0$ και η καμπή είναι το $f(0) = 0$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(0, f(0))$ είναι:

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

$f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

Οπότε $y = x$.

Άρα η f είναι κοίλη για κάθε $x \ge 0$.

Επομένως ισχύει $f(x) \le x$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x|dx = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 \left[x - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]dx =$$

$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = I_1 - I_2.$$

$$I_1=\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1=\frac{1}{2} \qquad I_2=\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$\int_0^1 (x)'\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}+1 \quad \text{τ.μ.}$$

Δ3. $x>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{\int_0^x f^2(t)\,dt-0}\cdot\int_0^x f^2(t)\,dt\cdot\ln\left|f(x)\right|.$$

$$\text{Θέτω } \int_0^x f^2(t)\,dt=u, \quad \lim_{x\to 0}\int_0^x f^2(t)\,dt=0$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\left(e^u-1\right)'}{(u)'}=\lim_{u\to 0}e^u=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{\int_0^x f^2(t)\,dt}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f^2(t)\,dt\cdot\ln\left|f(x)\right|=0\cdot\ln\left|f(0)\right|=0\cdot\ln 1=0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x\to 0}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot\int_0^x f^2(t)\cdot\ln\left|f(x)\right|=0.$$

Δ4. Θεωρώ $K(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right)$

Επειδή $f(t)$ συνεχής τότε οι $f^2(t)$ & $f(t^2)$ συνεχείς ως σύνθεση συνεχών, άρα η K παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[2,3]$.

$$K(2) = 3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8 < 0$$

Αιτιολόγηση:

Η f είναι κοίλη, τότε η εφαπτομένη της $y = x$ είναι πάνω από την C_f.

Άρα $f(t) \le t$. Επειδή $f(t) > 0$, έχουμε

$$f^2(t) \le t^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt < \int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)\,dt \le \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(t)\,dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8 < 0$$

$$K(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0$$

Αιτιολόγηση:

$$f(t) \le t \Leftrightarrow f(t) \le t$$

$$f(t^2) \le t^2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)\,dt \le \frac{1}{3}$$

Άρα $K(2)\cdot K(3) < 0$. Επομένως από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (2,3) : K(x_o) = 0$